

Εφαρμογή της Κλασματικής Γεωμετρίας στην Επέκταση Πόλεων

ΕΛΕΝΗ ΠΑΠΠΑ
Πολιτικός Μηχανικός

ΑΠΟΣΤΟΛΟΣ ΣΥΡΟΠΟΥΛΟΣ
Greek Molecular Computing Team

ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ
Καθηγητής Δ.Π.Θ.

Περίληψη

Η κλασματική γεωμετρία (*fractal geometry*) είναι ικανή να περιγράψει όλα τα σχήματα που υπάρχουν στη φύση, τα οποία καλούνται κλασματικά σχήματα. Το περίγραμμα μιας οποιασδήποτε πόλης είναι ένα τέτοιο σχήμα. Μετρώντας, λοιπόν, την κλασματική διάσταση του περιγράμματος μιας πόλης μπορούν να προκύψουν συμπεράσματα που αφορούν στην επέκταση ή τη συρρίκνωσή της. Στην παρούσα εργασία γίνεται εφαρμογή της θεωρίας της κλασματικής γεωμετρίας στην περίπτωση της πόλης της Ξάνθης, χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο καταμέτρησης πλαισίων. Τα συμπεράσματα που προκύπτουν, αν και όχι τα αναμενόμενα, είναι δικαιολογημένα δεδομένων των ελλিপών στοιχείων που βρέθηκαν για την Ξάνθη.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η ανεπάρκεια της κλασικής Ευκλείδειας γεωμετρίας και των επεκτάσεών της (π.χ. η γεωμετρία Reimann) να περιγράψει τα σχήματα που συναντάμε στο φυσικό κόσμο, οδήγησε τους μαθηματικούς στα μέσα του 20^{ου} αιώνα να αναζητήσουν μια άλλη γεωμετρία ικανή να περιγράψει τα σχήματα αυτά. Ο Πολωνο-Γάλλος μαθηματικός Benoit Mandelbrot εισήγαγε τον όρο «Γεωμετρία της Φύσης» (η θεωρία θεμελιώθηκε μαθηματικά στο [12], ενώ το [7] αποτελεί ένα πολύ κατανοητό εισαγωγικό εγχειρίδιο, που δεν κάνει χρήση μαθηματικού φορμαλισμού), θέλοντας με αυτό τον όρο να ονοματίσει μια γεωμετρία που μπορεί να περιγράψει κάποια από τα χαρακτηριστικά των ακτογραμμών των ηπείρων, των δασών, των βουνών, του κυκλοφορικού συστήματος, ακόμη και της δομής του εγκεφάλου. Ο Mandelbrot ονόμασε τα φυσικά σχήματα *fractals*, τα οποία στην ελληνική βιβλιογραφία απαντώνται ως κλασματικά σχήματα.

Η μελέτη των κλασματικών σχημάτων αποκάλυψε την ύπαρξη κάποιων ιδιοτήτων ή βασικών χαρακτηριστικών τους, τα κυριότερα από τα οποία είναι η αυτο-ομοιότητα ή αυτο-ομοιομορφία (*self-similarity*) και η κλιμάκωση (*scaling*) [3]. Η ομοιότητα ενός τμήματος του όλου με το όλο αποτελεί την έννοια της αυτο-ομοιότητας, δηλαδή ένα σχήμα ή μια δομή, παρουσιάζει παρόμοιες ιδιότητες σε διαφορετικές κλίμακες. Αν εξεταστεί μια τέτοιου είδους δομή σε διαφορετικές κλίμακες, θα προκύψουν τα ίδια θεμελιώδη

Υποβλήθηκε: 6.8.2004 Έγινε δεκτή: 2.6.2005

στοιχεία. Η κλιμάκωση αφορά στη διατήρηση της ίδιας λεπτομέρειας σε διαφορετικές κλίμακες.

Η Ευκλείδεια γεωμετρία παρέχει μια πρώτη προσέγγιση της δομής των φυσικών αντικειμένων, παρουσιάζοντας τη γη σαν τμήματα αποτελούμενα από σημεία, ευθείες γραμμές, κύκλους, ορθογώνια, τρίγωνα, κύβους και σφαίρες. Ακόμη, στην κλασική γεωμετρία η διάσταση ενός γεωμετρικού σχήματος είναι πάντα ακέραιος αριθμός. Η πραγματικότητα όμως διαφέρει. Η γεωμετρία των κλασματικών σχημάτων, την οποία εφεξής θα καλούμε κλασματική γεωμετρία, είναι μια επέκταση της κλασικής γεωμετρίας. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη δημιουργία πειστικών μοντέλων των φυσικών δομών, τα οποία ποικίλουν από φτέρες μέχρι γαλαξίες [11]. Επιπλέον, στην κλασματική γεωμετρία η διάσταση ενός αντικειμένου μπορεί να είναι και ρητός αριθμός.

Μία από τις πιο σημαντικές εφαρμογές της κλασματικής γεωμετρίας είναι η μέτρηση του μήκους των ακτογραμμών. Το ερώτημα του υπολογισμού του μήκους μιας ακτογραμμής είχε διατυπωθεί από τη δεκαετία του 1920 περίπου. Στα 1967 ο Mandelbrot [12] απέδειξε ότι η ακτογραμμή της Αγγλίας φαίνεται να έχει άπειρο μήκος. Έκτοτε έχει υπολογιστεί η κλασματική διάσταση των ακτογραμμών της Νορβηγίας, της Αυστραλίας, της δυτικής ακτής της Βρετανίας, της Βόρειας Καρολίνα των ΗΠΑ και της Ιαπωνίας. Η κλασματική διάσταση των ακτογραμμών αυτών παίρνει τιμές μεταξύ 1 και 2. Αυτό είναι φυσικό γιατί, αν και η ακτογραμμή είναι μία γραμμή, αν αντιμετωπιστεί συνολικά, καταλαμβάνει μια επιφάνεια στο επίπεδο. Με όμοιο τρόπο μπορεί να υπολογιστεί το μήκος και η διάσταση των συνόρων μεταξύ χωρών, των ποταμών και των οδικών δικτύων.

Πρόσφατες έρευνες στον τομέα της χωρικής ανάλυσης κατέληξαν στο συμπέρασμα πως και οι αστικές δομές μπορούν να αντιμετωπισθούν ως *fractals* (π.χ. βλ. [1, 2, 4, 5, 6, 9, 10]). Η κλασματική δομή του περιγράμματος μιας πόλης γίνεται πιο εμφανής όταν οι αστικοποιημένες περιοχές μιας πόλης, μιας μητρόπολης ή ενός αστικού συστήματος αντιμετωπίζονται ως σύνολο. Μια πολύπλοκη αστική δομή, καθώς εξελίσσεται από απλά αγροτεμάχια, φανερώνει μια οργανική διαδικασία ανάπτυξης κατά την οποία προστίθενται περισσότερες αστικοποιημένες περιοχές με την πάροδο του χρόνου.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η συνολική μορφή των αστικοποιημένων περιοχών μιας πόλης μπορεί να θεωρηθεί ως κλασματικό σχήμα και να περιγραφεί βάσει της κλασματικής γεωμετρίας. Και σ' αυτή την περίπτωση η διάσταση παίρνει τιμές μεταξύ 1 και 2. Οι έρευνες που έγιναν γύρω από την κλασματική διάσταση μιας αστικής δομής [13], αν και παρείχαν ενδιαφέροντα θεωρητικά συμπεράσματα και εμπειρικά αποτελέσματα, δεν ήταν συστηματικές, υπό την έννοια ότι οι πόλεις δεν επιλέχθηκαν σύμφωνα με κάποιο χωρικό πλάνο (όπως ιεραρχία μεγέθους πόλης ή πληθυσμού) και με κοινό σύνολο παραμέτρων (όπως κάλυψη του χάρτη, κλίμακα). Επίσης η ανάλυση της αστικής ανάπτυξης και ο συσχετισμός με τον αστικό πληθυσμό στις μελέτες αυτές βασίζονται κυρίως σε πρότυπη προσομοίωση παρά σε παρατηρήσεις πληθυσμού και αστικής ανάπτυξης. Τα αποτελέσματα κρίνονται ανολοκλήρωτα, αφού αφήνουν την κλασματική διάσταση και την προσομοίωση ανάπτυξης αποσυνδεδεμένα από την πραγματική επέκταση της γης και του πληθυσμού.

Στην παρούσα εργασία γίνεται παρουσίαση μιας προσπάθειας μέτρησης της κλασματικής διάστασης του περιγράμματος της Ξάνθης (εφεξής θα αναφερόμαστε στη μέτρηση της κλασματικής διάστασης του περιγράμματος της Ξάνθης γράφοντας απλά κλασματική διάσταση της Ξάνθης), λαμβάνοντας βέβαια υπόψη το γεγονός ότι η διαδικασία που ακολουθείται δίνει πιο αξιόπιστα αποτελέσματα, όταν εφαρμόζεται σε μητροπόλεις. Η εργασία διαρθρώνεται σε τέσσερις ενότητες. Η δεύτερη ενότητα είναι μια εισαγωγή στον υπολογισμό της κλασματικής διάστασης και στις μεθοδολογίες προσέγγισής της. Στην τρίτη ενότητα γίνεται εφαρμογή στην περίπτωση της Ξάνθης. Υπολογίζεται η κλασματική της διάσταση με χρήση του αλγόριθμου καταμέτρησης πλαισίων (box-counting). Τα συμπεράσματα και οι παρατηρήσεις συμπεριλαμβάνονται στην τέταρτη ενότητα.

2. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Η έννοια της διάστασης δεν είναι εύκολη στην κατανόηση. Είναι μια προσπάθεια ποσοτικοποίησης της πυκνότητας του Μετρικού χώρου που καταλαμβάνει ένα κλασματικό σχήμα, καθώς κι ένας τρόπος σύγκρισης των κλασματικών σχημάτων μεταξύ τους, ως προς το μέγεθος και την ομοιότητά τους. Να αναφερθεί σ' αυτό το σημείο ότι υπάρχουν πολλών ειδών κλασματικές διαστάσεις, όπως η Hausdorff-Besicovitch, η Minkowski-Boulingand και άλλες. Αυτές μπορούν, επίσης, να υπολογιστούν με πολλούς τρόπους, όπως με τη μέθοδο Calliper, η οποία βασίζεται σε μεγέθη γραμμικής μέτρησης και σε βήματα, τη μέθοδο καταμέτρησης πλαισίων (box-counting), η οποία χρησιμοποιεί ένα σύνολο πλεγμάτων που τοποθετούνται πάνω σε μια εικόνα, τη μέθοδο διαστολής ψηφίου (pixel-dilation), η οποία υπολογίζει τη διάσταση Minkowski-Boulingand βασισμένη σε ένα σύνολο απειροστών κύκλων και τη μέθοδο μάζας-ακτί-

νας (mass-radius), η οποία βασίζεται στο τμήμα της εικόνας που βρίσκεται μεταξύ ενός συνόλου ομόκεντρων κύκλων που καλύπτουν την εικόνα [13]. Κάθε μία από αυτές τις μεθόδους μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην ανάλυση αυστηρά αυτο-όμοιων αλλά και μη αυτο-όμοιων χωρικών σχημάτων, για ένα εύρος κλιμάκων.

Στην αστική και χωρική ανάλυση η κλασματική διάσταση υπολογίζεται είτε με τη μέθοδο καταμέτρησης πλαισίων είτε με τη μέθοδο μάζας-ακτίνας. Δεδομένου ότι οι αστικές ή οι αστικοποιημένες περιοχές δεν είναι αυστηρά αυτο-όμοιες και ότι οι κλίμακες, οι αναλύσεις εικόνας και τα μεγέθη κάλυψης δεν είναι ίδια, οι προκύπτουσες, από τις μελέτες αυτές, κλασματικές διαστάσεις, θα ποικίλουν, παρόλο που σε πολλές περιπτώσεις οι διαφορές θα είναι πολύ μικρές. Στην εργασία αυτή υπολογίζεται η κλασματική διάσταση βάσει του αλγόριθμου καταμέτρησης πλαισίων (Box-Counting Fractal Dimension algorithm, ή απλά BCFD), ο οποίος βασίζεται στη διάσταση Hausdorff-Besicovitch. Παρακάτω δίνεται η μαθηματική περιγραφή της διάστασης Hausdorff, που προέρχεται από το [8] και του αλγόριθμου καταμέτρησης πλαισίων, που προέρχεται από το [13].

Έστω U μη κενό υποσύνολο του n -διάστατου Ευκλείδειου χώρου, \mathbf{R}^n , και $\text{diam}(U)$ η διάμετρος της μικρότερης σφαίρας που καλύπτει όλες τις περιοχές του συνόλου. Έστω σύνολο $F = \left(F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \right)$, που περικλείεται στην ένωση των συνόλων $\{U_i\}$ και $0 < \text{diam}(U_i) \leq \delta$, τότε το $\{U_i\}$ είναι μια κάλυψη- δ (δ -cover) του F . Αν F υποσύνολο του \mathbf{R}^n και s ένας μη αρνητικός αριθμός, τότε για κάθε $\delta > 0$ είναι:

$$H_{\delta}^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} [\text{diam}(U_i)]^s : U_i \text{ } \delta\text{-καλυψη του } F \right\} \quad (2.1.1)$$

Καθώς μειώνεται το δ , η τάξη των επιτρεπόμενων καλύψεων του F μειώνεται. Έτσι μειώνεται και το $\inf H_{\delta}^s(F)$ και καθώς $\delta \rightarrow 0$ ισχύει:

$$H^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_{\delta}^s(F) \quad (2.1.2)$$

Το $H^s(F)$ καλείται s -διάστατο μέτρο Hausdorff του F .

Η διάσταση Hausdorff (ή Hausdorff-Besicovitch) δίνεται από τη σχέση:

$$\dim_H F = \inf \{s : H^s(F) = 0\} = \sup \{s : H^s(F) = \infty\} \quad (2.1.3)$$

έτσι ώστε ισχύει:

$$H^s(F) = \begin{cases} \infty & \text{αν } s < \dim_H F \\ 0 & \text{αν } s > \dim_H F \end{cases} \quad (2.1.4)$$

Για $s = \dim_H F$, το $H^s(F)$ μπορεί να είναι 0 ή ∞ , ή να ικανοποιεί την ανισότητα:

$$0 < H^s(F) < \infty \quad (2.1.5)$$

Για την ελαχιστοποίηση όλων των καλύψεων- δ , ο αλγόριθμος BCFD χρησιμοποιεί μία συνολική τετραγωνική κάλυψη συγκεκριμένου μεγέθους για το U_{δ} , ώστε να προσεγγισθεί η κυκλική κάλυψη που προαναφέρθηκε. Αρχικά το σύνολο F ενσωματώνεται σε κάποια μεγαλύτερα τετράγωνα, τα οποία διαιρούνται σε μικρότερα υπο-τετράγωνα

σταθερής διαγωνίου δ . Αυτή η εκλογή του U_i θα μπορούσε να παράγει τη σωστή D αρκεί το μέγιστο και το ελάχιστο όριο για $\delta \rightarrow 0$ να είναι προσεκτικά διαλεγμένα. Με μια συνολική, καθορισμένου μεγέθους, τετραγωνική κάλυψη η εξίσωση (2.1.1) γίνεται:

$$H_s^s(F) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(U_i)^s = \inf N(\delta)\delta^s \quad (2.1.6)$$

όπου $N(\delta)$ ο αριθμός των τετράγωνων κουτιών που καλύπτουν τις περιοχές του F . Εδώ πρέπει να σημειωθεί πως η ελαχιστοποίηση εξακολουθεί να υφίσταται εφόσον η θέση του F στο επίπεδο δεν είναι καθορισμένη και μαθηματικά είναι απαραίτητο να ελαχιστοποιηθούν όλοι οι πιθανοί προσανατολισμοί των κουτιών. Αυτό όμως είναι δυνατό, με τη διαθέσιμη υπολογιστική ικανότητα, μόνο για λίγους προσανατολισμούς.

Η προσεγγιστική διαδικασία του BCFD βασίζεται σε μια περιγραφή του Mandelbrot με την ακόλουθη βασική σχέση [13]:

$$N(\delta) \times \delta^s = C \quad (2.1.7)$$

όπου $N(\delta)$ ο αριθμός των κουτιών που περικλείουν τις αστικοποιημένες περιοχές C και s η πραγματική κλασματική διάσταση. Σχέσεις σαν την (2.1.7) μπορούν να εκφραστούν σε γραμμική μορφή σαν λογαριθμικές συναρτήσεις (log-linear functions):

$$\text{Log}(N(\delta)) = \text{Log}(C) + D \log(1/\delta) + E_s \quad (2.1.8)$$

όπου E_s είναι ο όρος του σφάλματος, $\text{Log}(C)$ η συνολική αστική περιοχή και D η εκτιμώμενη κλασματική διάσταση.

Ένα τετραγωνικό πλέγμα διαφόρων τιμών του δ τοποθετείται στην εικόνα της υπό εξέταση πόλης. Στη συνέχεια μετρώνται τα κουτιά $N(\delta)$ κι έτσι προκύπτει ένας πεπερασμένος αριθμός σημείων (δ , οι φυσικοί λογάριθμοι $\text{Log}N(\delta)$ και $\text{Log}(1/\delta)$). Η εκτιμώμενη κλασματική διάσταση D της πραγματικής διάστασης δ δίνεται από τη βέλτιστη κλίση του διαγράμματος $\text{Log}N(\delta)$ ως προς $\text{Log}(1/\delta)$. Η εκτίμηση αυτή εμπεριέχει κάποια ασάφεια για την D εξαιτίας κυρίως των επιλογών του δ . Προκειμένου να προκύψουν λογικές τιμές της D , οι τιμές του δ πρέπει να είναι σχετικά μικρές και, συγκεκριμένα, για τα κατώτατα όρια, τιμές μεγαλύτερες από τη διακριτική ανάλυση της εικόνας (pixel size) ενώ, για τα ανώτατα, τιμές σαφώς μικρότερες από το μέγεθος της εικόνας της πόλης (γιατί τότε το $N(\delta)$ θα ισούται πάντα με 1).

3. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗΝ ΞΑΝΘΗ-ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

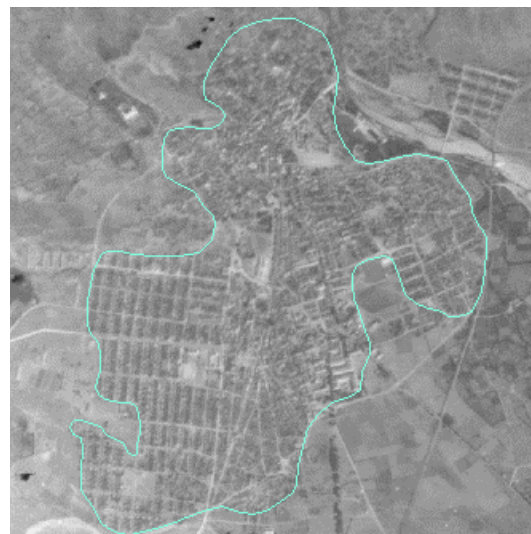
Για την υλοποίηση των στόχων της εργασίας, ήταν απαραίτητο να βρεθούν χάρτες της πόλης της Ξάνθης σε διάφορες χρονικές περιόδους. Ύστερα από σχετική έρευνα βρέθηκαν μόνο δύο χάρτες, ένας της δεκαετίας του '40 και ένας της δεκαετίας του '90. Με τα στοιχεία αυτά ήταν αδύνατη η μελέτη, έτσι, χρησιμοποιήθηκαν αεροφωτογραφίες της

Ξάνθης, παρά το γεγονός ότι οι αεροφωτογραφίες δεν έχουν την ίδια κλίμακα σε όλα τα σημεία. Εδώ αξίζει να σημειωθεί ότι οι αεροφωτογραφίες ελήφθησαν από μεγάλη απόσταση, ώστε θεωρείται ότι δεν επηρεάζουν τα τελικά αποτελέσματα, τα οποία είναι προσεγγιστικά ίδια με αυτά που θα προέκυπταν, εάν είχαν χρησιμοποιηθεί χάρτες. Οι αεροφωτογραφίες προέρχονται από τη Γεωγραφική Υπηρεσία Στρατού (Γ.Υ.Σ.). Χρονολογικά ξεκινούν από το 1945 και καταλήγουν στο 2002. Συγκεκριμένα χρησιμοποιήθηκαν αεροφωτογραφίες του 1945, 1969, 1976, 1978, 1990, 1991 και 2002.

Βασική προϋπόθεση είναι όλοι οι χάρτες ή αεροφωτογραφίες, να βρίσκονται σε ίδια κλίμακα. Οι αεροφωτογραφίες του ΓΥΣ είχαν διαφορετικές κλίμακες, από 1:15.000 μέχρι 1:42.000. Χρειάστηκε λοιπόν η μετατροπή τους σε ίδια κλίμακα. Προτιμήθηκε η μετατροπή σε κλίμακα 1:15.000. Μια άλλη μετατροπή που έπρεπε να γίνει έχει να κάνει με τη θέση λήψης της αεροφωτογραφίας. Αυτές που χρησιμοποιήθηκαν στην εργασία είχαν διαφορετικό προσανατολισμό. Με βάση λοιπόν την πρώτη αεροφωτογραφία, του 1945, τη θέση του ποταμού Κόσυνθου και με χρήση του AutoCAD, όλες οι αεροφωτογραφίες απέκτησαν ίδιο προσανατολισμό.

Ο αλγόριθμος καταμέτρησης πλαισίων απαιτεί αρχεία με μορφή εικόνας (PICT format). Ακολουθήθηκε μια διαδικασία μετατροπής των αρχείων που προήλθαν από τη σάρωση των αεροφωτογραφιών, προκειμένου να εισαχθούν στο AutoCAD 2004 για επεξεργασία και κατασκευή των περιγραμμάτων της πόλης της Ξάνθης για κάθε χρονολογία.

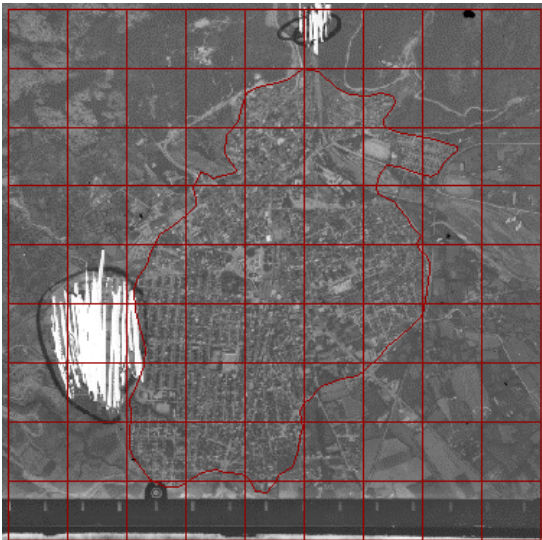
Στην παρακάτω εικόνα φαίνεται το περίγραμμα της πόλης της Ξάνθης ενδεικτικά για το 1945. Να σημειωθεί πως εντός του περιγράμματος βρίσκονται οικισμοί ή χωριά που ανήκουν στην πόλη της Ξάνθης, ανά περίοδο. Αυτή η διαδικασία μπορεί να βελτιστοποιηθεί με ψηφιοποίηση χαρτών (GIS) και επεξεργασία τους στο ArcView, ArcGIS.



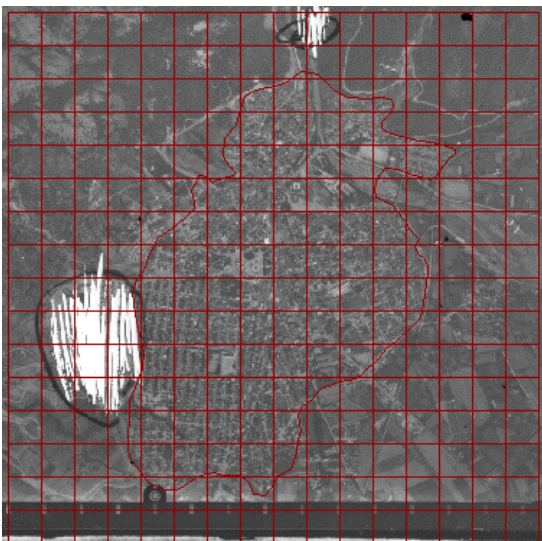
Σχήμα 1: Αστικοποιημένες¹ περιοχές της Ξάνθης για το 1945.

¹ Ο όρος «αστικοποιημένες περιοχές» χρησιμοποιείται για ανεπτυγμένες περιοχές σε κεντρικές πόλεις, με πληθυσμό 50.000 κατοίκους και πάνω.

Όπως αναφέρθηκε και στη δεύτερη ενότητα, ο αλγόριθμος καταμέτρησης κουτιών εφαρμόζεται με τοποθέτηση τετραγωνικού πλέγματος διαφόρων μεγεθών δ πάνω στα σχηματισμένα περιγράμματα της Ξάνθης. Αυτή η διαδικασία έγινε με χρήση του συστήματος ψηφιακής τυπογραφίας LaTeX. Στην εργασία χρησιμοποιήθηκαν για το δ οι τιμές: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15. Προέκυψε μ' αυτό τον τρόπο για κάθε εικόνα ένα σύνολο από κουτιά. Στα επόμενα σχήματα παρουσιάζεται η διαδικασία ενδεικτικά για τη χρονολογία 1976 και για τιμές $\delta=11$, 6, 3, 1. Τα τετραγωνικά πλέγματα κατασκευάστηκαν στο AutoCAD.

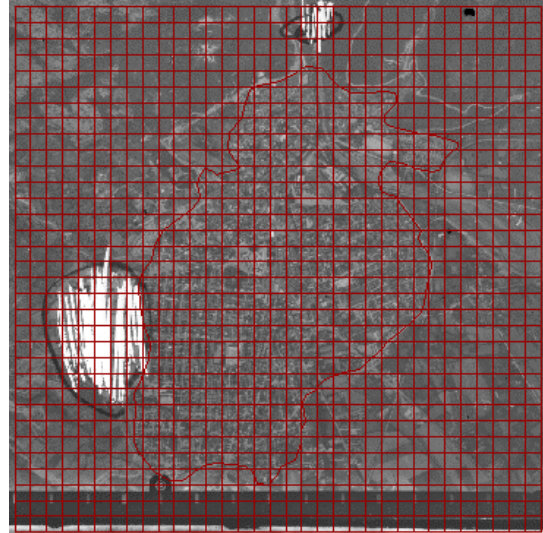


Σχήμα 2: Τετραγωνικό πλέγμα για $\delta=11^2$.

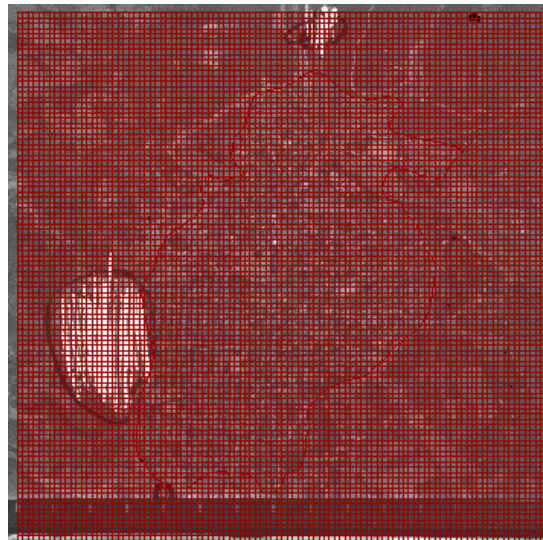


Σχήμα 3: Τετραγωνικό πλέγμα για $\delta=6$.

2 Τα σχήματα 1-8, καθώς και οι πίνακες 1 και 2 προέρχονται από τη διπλωματική εργασία του τμήματος Πολιτικών Μηχανικών του Δημοκρίτειου Πανεπιστημίου Θράκης με τίτλο «Η κλασματική φύση της αστικής ανάπτυξης. Εφαρμογή σε αστικό κέντρο



Σχήμα 4: Τετραγωνικό πλέγμα για $\delta=3$.



Σχήμα 5: Τετραγωνικό πλέγμα για $\delta=1$.

Στη συνέχεια απαιτείται καταμέτρηση των τετράγωνων κουτιών που περικλείουν το περίγραμμα της πόλης. Αυτή η διαδικασία για τις τιμές δ από 4 και πάνω ήταν εύκολη και μπορούσε να γίνει με γυμνό μάτι. Όμως για τις τιμές $\delta=3$, $\delta=2$ και ιδιαίτερα για τη $\delta=1$ αυτό ήταν αδύνατο, όπως είναι άλλωστε φανερό και από το παραπάνω σχήμα. Έτσι, με τη βοήθεια του AutoCAD και με απλή μέθοδο των τριών υπολογίστηκαν τα περιεχόμενα στο περίγραμμα της πόλης κουτιά, $N(\delta)$.

Προκειμένου να υπολογιστεί η κλασματική διάσταση είναι απαραίτητο, σε κάθε χρονολογία και για κάθε δ , να βρεθούν οι λογαριθμικές τιμές $\ln(N(\delta))$ και $\ln(1/\delta)$ και να κατασκευαστεί το διάγραμμα $\ln(1/\delta)-\ln(N(\delta))$. Η κλίση της ευθείας δίνει την κλασματική διάσταση της Ξάνθης σε κάθε περίπτωση. Ενδεικτικά δίνονται οι πίνακες με τις τιμές $\ln(1/\delta)$ και $\ln(N(\delta))$ που προκύπτουν για το 1945 και το 2002.

Πίνακας 1: Τιμές $\ln(N(\delta)) - \ln(1/\delta)$ για το 1945.

1945			
δ	$N(\delta)$	$\ln(1/\delta)$	$\ln(N(\delta))$
1	2532,889642	0	7,837116081
2	633,2224104	-0,693147181	6,450821720
3	275,831682	-1,098612289	5,619790832
4	158,3056026	-1,386294361	5,064527359
5	101,3155857	-1,609437912	4,618240256
6	64,84197482	-1,791759469	4,171953153
7	49,64463697	-1,945910149	3,904890368
8	36,47361084	-2,079441542	3,596589008
9	30,64796466	-2,197224577	3,422566254
10	25,32889642	-2,302585093	3,231945895
11	20,51640610	-2,397895273	3,021224863
12	16,21049371	-2,484906650	2,785658792
15	9,118402710	-2,708050201	2,210294647

Πίνακας 2: Τιμές $\ln(N(\delta)) - \ln(1/\delta)$ για το 2002.

2002			
δ	$N(\delta)$	$\ln(1/\delta)$	$\ln(N(\delta))$
1	4047,614003	0	8,305882851
2	1011,903501	-0,693147181	6,91958849
3	440,785165	-1,098612289	6,088557602
4	252,9758752	-1,386294361	5,533294129
5	161,9045601	-1,609437912	5,087007027
6	103,6189185	-1,791759469	4,640719924
7	79,33323446	-1,945910149	4,373657139
8	58,28564165	-2,079441542	4,065355779
9	48,97612944	-2,197224577	3,891333025
10	40,47614003	-2,302585093	3,700712665
11	32,78567343	-2,397895273	3,489991634
12	25,90472962	-2,484906650	3,254425563
15	14,57141041	-2,708050201	2,679061418

Από τα δεδομένα των πινάκων αυτών κατασκευάζονται τα διαγράμματα $\ln(1/\delta)$ ως προς $\ln(N(\delta))$ για κάθε χρονολογία.

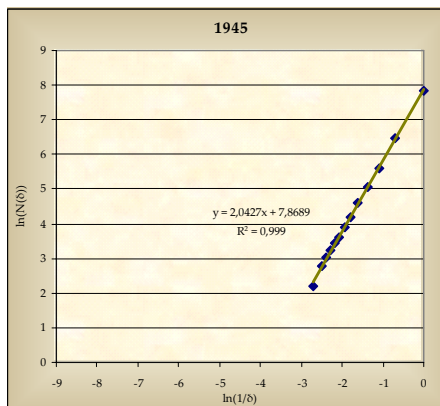
Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή, η κλασματική διάσταση μιας πόλης, μιας αστικής δομής γενικά, πρέπει να έχει τιμή μεταξύ 1 και 2. Παρατηρείται, όμως, στο σχήμα 6 η εξίσωση ευθείας:

$$y = 2,0427x + 7,8689$$

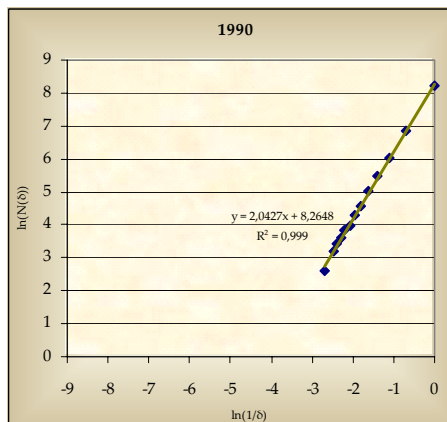
Η κλασματική διάσταση της Ξάνθης για το 1945 προκύπτει ίση με 2,0427 και μάλιστα από το $R^2=0,999$ συνεπάγεται πολύ καλή προσέγγιση της ευθείας στα δεδομένα σημεία. Για την εξαγωγή σωστών συμπερασμάτων δίνονται και τα διαγράμματα για το 1990 και το 2002. Παρατηρείται ότι η διάσταση όχι μόνο δεν είναι μεταξύ 1 και 2, αλλά επιπλέον δεν έχει επέλθει η παραμικρή αλλαγή στην τιμή της.

Το φαινόμενο αυτό είναι απόλυτα λογικό δεδομένης της απουσίας επαρκούς χαρτογραφικού υλικού. Να αναφερθεί απλά ότι το χαρτογραφικό υλικό για την Ξάνθη καλύπτει μια περίοδο 57 ετών, ενώ σε ανάλογες μελέτες του εξω-

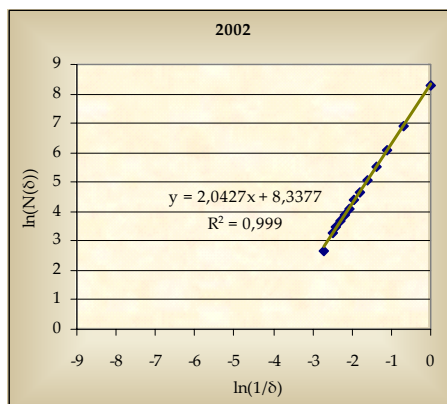
τερικού υπήρχε υλικό 200 ετών [13]. Στην περίοδο των 57 χρόνων η επέκταση της Ξάνθης υπήρξε ασήμαντη. Αυτό είναι εμφανές και στους πίνακες 1 και 2, όπου διαπιστώνεται ελάχιστη αύξηση των τιμών $\ln(N(\delta))$ από το 1945 στο 2002, κάτι το οποίο φανερώνει μικρή αύξηση των αστικοποιημένων περιοχών της Ξάνθης. Ενδεχομένως τα αποτελέσματα να προέκυπταν αλλιώς, αν υπήρχαν στοιχεία από το 1700 για παράδειγμα.



Σχήμα 6: Διάγραμμα $\ln(1/\delta) - \ln(N(\delta))$ για το 1945.



Σχήμα 7: Διάγραμμα $\ln(1/\delta) - \ln(N(\delta))$ για το 1990.



Σχήμα 8: Διάγραμμα $\ln(1/\delta) - \ln(N(\delta))$ για το 2002.

4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΓΕΝΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Όπως έχει αναφερθεί, η κλασματική διάσταση μιας αστικής δομής λαμβάνει τιμές από 1 μέχρι 2. Το τελικό αποτέλεσμα της κλασματικής διάστασης για την περίπτωση του περιγράμματος της Ξάνθης προέκυψε ίσο με 2,0427. Μια κλασματική γραμμή με διάσταση 2,0427 τείνει να «γεμίσει» το επίπεδο στο οποίο ανήκει. Αυτό όμως, για μια απλή κλασματική γραμμή όπως το περίγραμμα της Ξάνθης, δεν είναι λογικό. Οι πιθανοί λόγοι, οι οποίοι οδήγησαν στο αποτέλεσμα αυτό, αναλύονται παρακάτω.

Η διαδικασία που ακολουθήθηκε στην παρούσα εργασία, όπως ήδη αναφέρθηκε, δίνει αξιόπιστα αποτελέσματα όταν εφαρμόζεται σε μητροπόλεις. Σε ανάλογη μελέτη του εξωτερικού [13], εφαρμόστηκε ο αλγόριθμος καταμέτρησης πλαισίων στην περίπτωση της Βαλτιμόρης, η οποία το 1953 για παράδειγμα είχε πληθυσμό 946.000 κατοίκους. Ένας από τους βασικότερους λόγους που οδήγησαν στο αποτέλεσμα 2,0427 είναι το γεγονός ότι η Ξάνθη είναι μια μικρή πόλη, χωρίς σημαντική επέκταση των ορίων της. Η επέκταση της πόλης ήταν κυρίως κατακόρυφη παρά οριζόντια.

Επίσης, η απουσία επαρκούς χαρτογραφικού υλικού και στοιχείων για την ανάπτυξη και επέκταση της Ξάνθης είναι ένας βασικός λόγος που μπορεί να επηρέασε το τελικό αποτέλεσμα. Τα στοιχεία που είχαμε υπό την κατοχή μας, καλύπτουν μια χρονική περίοδο 57 ετών. Στη διάρκεια των ετών αυτών η Ξάνθη δεν παρουσίασε σημαντική αύξηση της έκτασής της, επομένως τα συμπεράσματα ήταν αναμενόμενα. Αξίζει εδώ να αναφερθεί πως στην περίπτωση της Βαλτιμόρης (που αναφέρθηκε στην προηγούμενη παράγραφο) υπήρχε υλικό 200 χρόνων.

Η χρήση αεροφωτογραφιών της πόλης της Ξάνθης, έναντι χαρτών, πιθανώς να επηρέασε το τελικό αποτέλεσμα, δεδομένου ότι οι αεροφωτογραφίες παρουσιάζουν παραμορφώσεις και δεν έχουν την ίδια κλίμακα σε όλα τα σημεία. Βέβαια οι αεροφωτογραφίες ελήφθησαν από μεγάλη απόσταση, ώστε θεωρήθηκε ότι δεν επηρεάζουν τα τελικά αποτελέσματα, τα οποία είναι προσεγγιστικά ίδια με αυτά που θα προέκυπταν, εάν είχαν χρησιμοποιηθεί χάρτες.

Σε γενικές γραμμές, οι γραμμικές συναρτήσεις με λογαριθμικούς αλγόριθμους των κλασματικών διαστάσεων, που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα μελέτη, μπορούν να παράγουν ικανοποιητικές προσεγγίσεις των πληθυσμιακών μεγεθών και κυρίως της ανάπτυξης των αστικών περιοχών.

Διαφορετικές αστικές μορφές μπορούν να έχουν στην πραγματικότητα ίδια τιμή κλασματικής διάστασης. Αυτό είναι ένδειξη πως από μόνη της η κλασματική διάσταση λέει λίγα σχετικά με τον προσανατολισμό και τη σύνθεση μιας

φυσικής αστικής μορφής. Η χρησιμότητα της διάστασης έγκειται πρωταρχικά στη συνολική μέτρηση όλης της αστικής μορφής ως κλασματικό σχήμα.

Πόλεις με παρόμοια κλασματική διάσταση και αστικοποιημένες περιοχές, μπορούν να έχουν πολύ διαφορετικά πληθυσμιακά μεγέθη. Αυτή η παρατήρηση είναι πολύ σημαντική, γιατί αποδεικνύει πως η κλασματική διάσταση αποτελεί καλό μέτρο των συνολικών αστικοποιημένων περιοχών αλλά όχι της πυκνότητας αστικού πληθυσμού. Αυτό συμβαίνει επειδή ο πληθυσμός μιας πόλης μπορεί να έχει σημαντικές αλλαγές και διακυμάνσεις (είτε αύξηση είτε μείωση), κάτι το οποίο δε συμβαίνει με την αστική ανάπτυξη. Η συνολική φυσική μορφή των αστικοποιημένων περιοχών μιας ενεργούς πόλης, σπάνια μειώνεται.

Τελειώνοντας, πρέπει να αναφερθεί ότι η χρήση διαφορετικών μεθόδων υπολογισμού της κλασματικής διάστασης μιας πόλης μπορεί να παράγει κάπως διαφορετικά αποτελέσματα. Εκτός από τις διαφορές των μεθόδων, η διαφοροποίηση στο μέγεθος της εικόνας, στη χαρτογραφική κάλυψη και στα όρια, στην ανάλυση της εικόνας, στην ακρίβεια των δεδομένων, στη χρονική περίοδο, στο μέγεθος των πλαισίων κάλυψης και στην κλίμακα, μπορεί να συντελεί στην ενίσχυση των διαφορών αυτών. Θα ήταν ενδιαφέρον να εφαρμοστεί η μέθοδος σε πληρέστερα και ενιαίας μορφής δεδομένα στο μέλλον.

5. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Arlinghaus, S. L., **Fractals take a central place**. Geogra. ska Annaler, 67 B, 83–88, 1985.
2. Arlinghaus, S. L., and Nystuen, J. D., **Geometry of boundary exchanges**. The Geographical Review, 80, 21–31, 1990.
3. Barnsley M. F, **Fractals everywhere**, Second edition, Ap. Professional, Georgia, 1993.
4. Batty, M., and Longley, P. A., **Urban shapes as fractals**. Area, 19, 215–221, 1987a.
5. Batty, M., and Longley, P. A., **Fractal-based description of urban form**. Environmental and Planning B, 14, 123–134, 1987b.
6. Batty, M., and Longley, P. A., **Fractal Cities: A Geometry of Form and Function** (London Academic Press), 1994.
7. Briggs J., **Fractals: The patterns of Chaos**, Touchstone Books, New York, NY, USA, 1992.
8. Falconer Kenneth, **FRactal GEOMETRY**, Mathematical Foundations and Applications, John Wiley and Sons, 1990.
9. Fotheringham, A. S., Batty, M., and Longley, P. A., **DiVusion-limited aggregation and the fractal nature of urban growth**. Papers in the Regional Science Association, 67, 55–69, 1989.
10. Frankhauser, P., **Fractal properties of settlement structures**. Paper presented at the First International Seminar on Structural Morphology, Montpellier, France, 1992.
11. Korvin G., **Fractal models in the earth science**, Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, The Netherlands, 1992.
12. Mandelbrot B., **The fractal Geometry of Nature**, San Fransisco, CA, W. H. Freeman & Co, 1983.
13. Shen Q., **Fractal dimension and fractal growth of urbanized areas**, Int. J. Geographical Information Science, 16 (5), 419-437, 2002.

Ελένη Παππά

Πολιτικός Μηχανικός, Ν. Εργ. Κατοικίες, Μαργαρώνα 18, 481 00, Πρέβεζα.

Απόστολος Συρόπουλος

Greek Molecular Computing Team, 28ης Οκτωβρίου 366, 671 00, Ξάνθη.

Βασίλειος Παπαδόπουλος

Καθηγητής Δ.Π.Θ., Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Βασιλίσσης Σοφίας 12, 671 00 Ξάνθη.

Extended summary

Application of Fractal Geometry to Urban Growth

ELENI PAPPA
Civil engineer

APOSTOLOS SYROPOULOS
Greek Molecular Computing Team

BASIL PAPADOPOULOS
Professor D.U.TH.

Abstract

Fractal geometry is the geometry that describes all the shapes that exist in nature, called fractals. The outline of any city is a fractal. Therefore measuring the fractal dimension of a city can lead to conclusions about its growth or its shrinkage. In the present paper, fractal geometry was applied to the outline of Xanthi, using the box-counting fractal dimension algorithm.

Classical geometry and its descendants (e.g., Reimann's geometry) are not adequate to describe real world geometric objects such as clouds, mountains, etc. This deficiency was remedied with the introduction of fractal geometry, a geometry capable of describing coastlines, mountains, transportation networks, even the structure of brain.

One of the novelties introduced by fractal geometry is the concept of self-similarity: i.e., parts of a fractal object are surprisingly similar to the whole, especially when these parts are scaled. As a viewer peers deeper into a fractal image he may notice that the shapes seen at one scale are similar to the shapes seen in the detail at another scale.

Recent research results from spatial analysis ([1, 2, 4, 5, 6, 9, 10]) have revealed that many urban structures (e.g., city boundaries, transportation networks, etc.) are indeed fractal objects. The fractal structure of a city becomes more apparent when the urbanized area of a city, metropolis or urban system is viewed as a whole. A complex urban structure, evolving from simple land parcels, reveals an organic growth process in which more urbanized areas are added over time. Thus, the overall form of the urbanized areas of a city can be treated as a fractal and described by fractal geometry.

When studying urban structures, it is very important to be able to compute their fractal dimension, which is usually a number between 1 and 2. There are many types of fractal dimensions, such as the Hausdorff-Besicovitch dimension, the Minkowski-Boulingand dimension etc. Fractal dimensions can also be calculated in a number of ways, including the Calliper method, which is based on linear measurement sizes and steps, the box-counting method, which uses a set of meshes laid over an image, the pixel-dilation method, which calculates the Minkowski-Boulingand dimension based on a set of infinitesimally

Submitted: Aug. 6, 2004 Accepted: July 2, 2005

small circles and the mass-radius method, which is based on the image portion found within a set of concentric rings covering the image.

In urban and spatial analysis fractal dimensions are mainly computed using the box-counting or the mass-radius method. In this paper we describe our endeavor to compute the fractal dimension of Xanthi (a Greek town with approximately 50,000 inhabitants) using the box-counting method. However, the methodology that was employed to compute the fractal dimension of Xanthi produces better results when it is applied to towns of significant size. In particular, we have computed the fractal dimension of Xanthi using the so called Box-Counting Fractal Dimension algorithm (or BCFD, for short), which is based on the Hausdorff-Besicovitch dimension.

For the realization of the objectives of this paper, it was essential to find maps of Xanthi in various time periods. Given the inadequacy of map coverage we used photomaps of Xanthi from 1945 to 2002, despite the fact that photomaps do not have the same scale at every point. One of the most important presuppositions is that all the photomaps should be in the same scale.

The BCFD algorithm was applied by laying square meshes of various sizes over the shaped outlines of Xanthi. This process was accomplished using the Overpic package of LaTeX. The box-sizes used, δ , were: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15. This procedure resulted in a number of boxes, $N(\delta)$, containing the urbanized areas of Xanthi, which was computed using AutoCAD. The estimated fractal dimension D is given by the best slope of the $\ln(N(\delta))$ vs $\ln(1/\delta)$ graph.

The linear equation of graph $\ln(N(\delta))$ - $\ln(1/\delta)$ is given for the case of Xanthi by the following relation:

$$y = 2.0427x + 7.8689$$

In the relation above the value 2.0427 represents the fractal dimension of Xanthi. Quite surprisingly, the computed fractal dimension did not fall within the expected range of values. In addition, we did not manage to observe any fluctuation in its value. Though these results seem strange, they are due to a number of factors:

1. The map coverage was quite limited; it covered a period of 57 years, while in similar studies in other countries there was material dating back 200 years.
2. The development of the town was mainly vertical.

Clearly, if the data we had at our disposal were more adequate, it would be possible to compute a reasonable fractal dimension. In spite of this, the computed fractal dimension indicates that Xanthi will not actually change in the near future, which is quite true. Indeed, the fact that the population of Greece has not changed significantly over the last 20 years and the fact that there is no economic growth in the area can be used to prove the above statement indirectly.

Generally different urban forms can actually have the same fractal dimension value. This indicates that fractal dimension alone says little about the orientation and composition of a physical urban form. The usefulness of the fractal dimension lies primarily in its aggregate measure of overall urban form as a fractal.

Cities with similar fractal dimension and urbanized areas may have quite different population sizes. This observation is very important because it proves that fractal dimension is a good measure of the total urbanized areas, but not a good measure of urban population density. This happens because, while the population of a city may have sizeable changes (increase or reduction) over time, its urbanized areas usually increase at various paces. The total physical size of urbanized areas of a livable city rarely decreases.

Finally, we should mention that the use of different methods in calculating the fractal dimension of a city may produce different results. Apart from the differences in methods, disparities in image size, map coverage and boundaries, image resolution, data accuracy, time period, box-size and scale, may also contribute to differences in results. It would be interesting to see a more unified method, database and a set of modelling parameters to be adopted in future endeavors.

Eleni Pappa

Civil engineer, N. Erg. Katoikies, Margarona, 18, 481 00, Preveza.

Apostolos Syropoulos

Greek Molecular Computing Team, 28th Octovriou, 366, 671 00, Xanthi.

Basil Papadopoulos

Professor D.U.TH., Dept. of Civil Engineer, Basilissis Sofias, 12, 671 00, Xanthi.